



## 实验8 求解线性方程组方法

本工作页介绍使用Mathcad 求解线性方程组的各种方法. 以三阶线性方程组

$$2 \cdot x + y - 5z = 1$$

$$2 \cdot x + 3y - 2z = 5$$

$$x + y + 2z = 2$$

为例说明.

**Method 1** 定义一个三wei列向量, 在个占位符处分别输入三个方程, 点击Symbolic板上的solve按钮,在随后的占位符处, 顺次键入未知数x,y,z即可

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot x + y - 5z = 1 \\ 2 \cdot x + 3y - 2z = 5 \\ x + y + 2z = 2 \end{pmatrix} \text{solve}, x, y, z \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} & \frac{9}{5} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot x + y - 5z = 1 \\ 2 \cdot x + 3y - 2z = 5 \\ x + y + 2z = 2 \end{pmatrix} \text{solve}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} & \frac{9}{5} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

**Method 2** 调用Given...Find求解模块.

$$\text{Given} \quad 2 \cdot x + y - 5z = 1 \quad 2 \cdot x + 3y - 2z = 5 \quad x + y + 2z = 2$$

$$\text{Find}(x, y, z)^T \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} & \frac{9}{5} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

**Method 3** 使用逆矩阵

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{rank}(A) = 3$$

$$X := A^{-1} \cdot B$$

$$X^T \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} & \frac{9}{5} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} = (-0.067 \quad 1.8 \quad 0.133)$$

**Method 4** 对增广矩阵使用Mathcad 的内置函数 rref 对它作行变换.

$$\text{rref}(\text{augment}(A, B)) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

**Method 5** 对系数矩阵和常数列向量, 调用 Isolve 函数求解.

$$X := \text{lsolve}(A, B) \quad X^T \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} & \frac{9}{5} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

**Method 6 使用广义逆矩阵函数geninv求解, 对非奇异方阵, 广义逆等于逆矩阵.**

$$X := \text{geninv}(A) \cdot B \quad X^T \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} & \frac{9}{5} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

**Method 7 用Cramer Law**

$$A1 := \text{augment}(B, \text{submatrix}(A, 0, 2, 1, 2))$$

$$A2 := \text{augment}(\text{submatrix}(A, 0, 2, 0, 0), B, \text{submatrix}(A, 0, 2, 2, 2))$$

$$A3 := \text{augment}(\text{submatrix}(A, 0, 2, 0, 1), B)$$

$$X_0 := \frac{|A1|}{|A|} \quad X_1 := \frac{|A2|}{|A|} \quad X_2 := \frac{|A3|}{|A|}$$

$$X^T \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} & \frac{9}{5} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} = (-0.067 \quad 1.8 \quad 0.133)$$

**Method 7 编程求解, 以下是用克拉姆法则求解的程序**

```
Xsolve(M,B) := "克拉姆法则求解线性方程组"
                n ← cols(M)
                m ← rows(M)
                "本程序要求系数矩阵为方阵" if m ≠ n
                if |M| = 0
                    error("方程组无解")
                    break
                for k ∈ 0..n-1
                    M1 ← M
                    M1⟨k⟩ ← B
                    dk ← |M1|
                d
                |M|
```

$$\text{Xsolve}(A, B)^T = (-0.067 \quad 1.8 \quad 0.133)$$

$$\begin{pmatrix} a \cdot x + y - z = 2 \\ y - z = 1 \\ x + c \cdot z = 1 \end{pmatrix} \text{solve, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{(a-1+a \cdot c)}{a \cdot c} & \frac{(a-1)}{a \cdot c} \end{bmatrix}$$

Given

$$a \cdot x + y + z = 1$$

$$2 \cdot x - b \cdot y + z = 1$$

$$x - y - z = 0$$

$$\text{Find}(x,y,z)^T \rightarrow \left[ \frac{1}{(a+1)} \quad \frac{(-a+2)}{(a+a \cdot b+1+b)} \quad \frac{(a-1+b)}{(a+a \cdot b+1+b)} \right]$$

$$a \cdot x^2 - b \cdot x + c = 0 \text{ solve, } x \rightarrow \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \left[ b + \left( b^2 - 4 \cdot a \cdot c \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \left[ b - \left( b^2 - 4 \cdot a \cdot c \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{array} \right]$$